Prüfungsvorbereitung Simulation (2. Fassung)

René Pönitz
rene (@) renephoenix.de

16. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeine Grundlagen der Modellierung und Simulation

1.1 Typischer Ablauf von Simulationsexperimenten

1. reales oder hypothetisches System
2. Modellierung
3. Simulationsexperiment
4. Auswertung und Optimierung
5. Systemanalyse und Optimalkonfiguration
6. Statistische Analyse zwischen 5 und 4, Modelloptimierung, -verifizierung und -validierung zwischen 4 und 3

Der Ablauf der Modellierung:

1. reales System (gegen Theorie oder Daten)
2. Modellentwurf (System- und Prozeßanalyse, Abstraktion, Bestimmung Modelklasse)
3. ergibt konzeptionelles Modell
4. Modellimplementation (Implementierung, Verifikation und Validierung)
5. Computermodel

Ein Simulationsexperiment liefert nur eine quantitative Bewertung eines möglichen Systemzustandes. Eine Optimierung von Modellparametern setzt einen erweiterten Experimentieralgorithmus voraus.

Siehe Folie: Einleitungsfolie, 13 und 14

1.2 Begriffe: Validierung, Verifizierung, Sensitivitätsanalyse

1.2.1 Validierung

- Vergleich des Modells mit dem Original bzw. Hypthese (baue ich das richtige Haus?)
- ist abstrakt, umfangreich und anspruchsvoll
- Fehler insbesondere:
  - im Modell,
  - Programmierfehler
  - verwendete Daten
  - Modellanwendung / Experimentdurchführung
  - Interpretation der Ergebnisse

1.2.2 Verifizierung

- überprüft die Funktion des Modells anhand von Funktionstests in Relation zum Modell (baue ich das Haus richtig?)
- implementierungsbezogen

1.2.3 Sensitivitätsanalyse

- spez. Form der Modellüberprüfung
- Reaktion des Modells auf (kleine) Änderungen der Ausgangsdaten und wichtiger Modellparameter (also Einfluß der Modellhypothesen)
- kleine Veränderungen Eingabsdaten => nur kleine Veränderungen des Ergebnisses

Siehe Folie: Einleitungsfolie, 18

1.3 Klassifizierung der Modelle in der Simulationsanalyse

- konstant => statisches System
- veränderlich => dynamisches System
- veränderlich + stetig => kontinuierliches System / Modell
- veränderlich + diskontinuierlich => diskretes System / Modell

Siehe Folie: Einleitungsfolie, 19, ggf. auch 21

2 Modellierung zufälliger Prozesse

2.1 Begriffe: Pseudozufallszahlen, Dichte- und Verteilungsfunktion

2.1.1 Pseudozufallszahlen

Es ist eine Folge von Zahlen, die aufgrund der verwendeten Algorithmen **nicht zufällig** sind. Je nach Simulationsmodell können diese aber verwendet werden.

2.1.2 Dichtefunktion

charakterisiert die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Wahrscheinlichkeit

2.1.3 Verteilungsfunktion

ist Integral der Dichtefunktion (sozusagen: Aufsummerierung aller Wahrscheinlichkeit bis Zustand X)
Siehe Folie: Modellierung von Zufallsgrößen 7 und 11

2.2 Kriterien von Pseudozufallszahlen

- Unabhängigkeit der Zahlen
- Gleichverteilung (die emirische Verteilung muß im Intervall möglichst konstant sein, keine Häufung)
- Besetzungsdichte (Theorie: unendlich klein. Praxis: es gibt immer Lücken zwischen zwei Werten)
- Effizenz (Generierungsgeschwindigkeit und Speicherplatzfrage - heute nicht mehr relevant)
- Reproduzierbarkeit (eine Simulation mit einer Zahlenfolge muß bei Bedarf wiederholbar sein, Lösungsansatz: mit Startwert x_0 arbeiten.)

Siehe Folie: Modellierung von Zufallsgrößen 16 und 17

2.3 Zufallszahlen nach Greenberger

$x_{i+1} = a * x_i mod\ m$

- m = Modulekoeffizent, optimal sind Zweierpotenten (2^{40} bis 2^{50}
- a = Multiblikationskoeffizent (gerade bei ungeraden m)
- Gefahr durch Entartungen
- Abwandung durch: $x_{i+1} = (a * x_i + b) mod\ m$
- b = ungerade. Reduziert Entartungen
- Greenberger sehr häufig zur Generierung zun Zufallszahlen verwendet

2.4 Anpassung gleichverteilter Zufallszahlen an andere Intervallgrößen bei gegebener Zufallszahlenfunktion rnd()

- Gleichverteilungen aus dem Intervall [0,1] kann man in andere Gleichverteilungen umwandeln durch Verschieben und Spreizen
- ensuremath y = a + (b -a) * x
- Auf diskrete Zahlen durch Rundungsfunktion anpaßbar (Achtung: evtl. Intervall [a,b+1] annehmen, damit auch die rechte Intervalsgrenze erreichbar ist)

2.5 Methode der Inversion der Zufallszahlenfunktion am Beispiel einfacher Funktionen

- Verteilungsfunktion ist Integral der relative Dichtefunktion
- Verteilungsfunktion ist demnach monoton steigend.
- Verteilungsfunktion hat Wertebereich [0,1].
- Umkehrfunktion F-1(x) hat nur Definitionsbereich [0,1]
- wir "schießen"nun auf diese Funktion - und Kugel sammelt sich da, wo sie den Graphen berührt. Die eingehenden Werte müssen gleichverteilt sein. Das Ergebnis wird unsere gewünschte Verteilung sein.
- da wo die meisten Kugeln liegen, ist Anstieg der Verteilungsfunktion am größen - folglich Dichtefunktion groß.
- als Dichtefunktion kann nun jede beliebige genommen werden - damit entstehen unterschiedliche Verteilungen (z.B. Gaußche Glockenkurve)

Beispiel:

- Exponentialverteilung: $f(y) = \lambda e^{-\lambda x} fuer\ x > 0,\ sonst\ 0$
- Verteilungsfunktion: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- Umkehrfunktion F-1(x): $F^{-1}(x) = \frac{ln(1-y)}{-\lambda}$
- Exponentialverteilung Zufallszahlen durch $F^{-1}(x) = \frac{ln(y)}{-\lambda}$

2.6 Funktionsweise und Beispielprogramm der Standard-Monte-Carlo-Simulation

Das Monte-Carlo-Verfahren ist noch keine echte Simulation. Es fehlt eine explizite Modellierung dynamischer Prozesse. Schwerpunkt ist die Analyse von Wechselwirkungen zufälliger Größen.

- System mit N zufälligen Größen liegt vor
- kein Gedächtnis, keine Trägheit
- Beschreibung des Modells durch analytische, algorithmische oder empirische Methoden (auch gemischt)
- ein Vektor von Zufallszahlen entsprechend der Verteilungsfunktion jeder Größe wird generiert
- die Reaktion des Systems wird für eine große Anzahl von Zufallsvektoren statistisch bestimmt

Anwendungsbereiche:

- näherungsweise Berechnung nicht lösbarer Integrale
- Numerische Bestimmung von Naturkonstanten (PI)
- Einsatz als oder in Optimierungsverfahren
- Risikoanalyse zur Abschätzung der Folgen von Entscheidungen bei zufälligen Randbedingungen
- Cross-Impact-Analyse zur Berechnung sich gegenseitig bedingender Entscheidungsabläufe, z.B. bei der Abschätzung des Konkurrenzverhaltens
- Warteschlangenberechnungen

Beispiel Eisdiele

- Absatzmenge hängt ab: Anzahl Kunden ja Tag und Portionsgröße
- Anzahl Kunden hängen ab von Wetter (Temperatur) und Einwohner (Bevölkerung)
- $K = f(T,B) + z$ (z symbolisiert die Steuung)
- je größer Portion, desto weniger wird sie gekauft (geometrische Verteilung)
- Preis p, Selbstkosten s, Gemeinkosten g
- Algorithmus: Ermittlung der Temperatur, Ermittlung der Kundenanzahl, Ermittlung der Portionsgröße (1..K), Bestimmung des Tagesgewinns - und das ganze nun mit anderen Wetterbedingungen, Gewinn / Verlust als $f(T)$
- Ergebnis: ist Geschäft rentabel? Empfindlichkeit auf Wettereinflüsse
- Schlußfolgerung: Schließung des Geschäftes bei schwachen Zeitenm Reduzierung Gemeinkosten

3 kontinuierliche Modelle

3.1 Prinzipielle Modellierung von Differntialgleichungen

- Definitions von Zustandsvariablen (aus Systemanalyse) und Beschreibung der Relationen zwischen den Variablen (z.B. über Abhängigkeiten und Differntialgleichungen)
- Lösung mit Integralen nur selten möglich, da Funktion unbekannt ist. Bekant sind lediglich die Abhängigkeiten zu anderren Variablen (Sensitität)
- folglich: numerische Lösung

Siehe Folie: kontinuierliche Modelle 6-8

3.2 Beispielrechnung mit der Methode von Euler

Aus der Gleichung macht man per Einschrittverfahren:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + f(x,t) * \Delta t$$

Man nimmt bisherigen Wert - und dem Zuwachs multipliziert mit dem Intervall.

3.3 Fehlerbetrachtung

Es gibt zwei Fehler:

- Approximationsfehler
- Rundungsfehler

Unterschied: Rundungfehler wird bei kleinen Schrittweiten kritisch, Approximation bei großen. In der Funktion Fehler(Delta t) gibt es ein (Fehler-)Minimum.

Approximationsfehler kann man reduzieren durch:

- Verbesserung der Approximationsfunktion
- kleinere Schrittweite (dafür Rundungsfehler)

  Rundungsfehler kann man durch größere Genauigkeiten mindern.

Siehe Folie: kontinuierliche Modelle Folie 14+15

3.4 Praktische Verfahrung zur Minimierung der Berechnungsfehler

Alternative wäre:

- Range-Kutta-EinschrittVerfahren
  - mehrfache Berechnung der Steigung mit unterschiedlichen Schrittmaß => Mittelwert
  - Verfahren relativ empfindlich in Bezug auf Veränderung der Schrittweite
- Mehrschrittverfahren
  - Iterationen, neuer Wert ergibt sich aus vorangegangengen Werten
  - mit Einschrittverfahren Startpunkt ermitteln, danach mit gefundenen Startwerten weiterrechnen

Siehe Folie: kontinuierliche Modelle 18 und 19

3.5 VENSIM: Unterschied zwischen Level und normaler Variable, Modellierung von empirischen Werteverläufen, typische Modellstrukturen z.B: Zinsberechnung bei Krediten

Variablen in VENSIM:

- Normale Variable nimmt einen zugewiesenen Wert an - und überschreibt ihn
- Levelvariablen addieren den zugewiesen Wert. Sie stellen das Integral dar.
- Konstante ändert sich nicht
- LookUp - Variable auf Basis empirischer Vorgaben
- Shadow ist Referenz auf interne Variablen (z.B. Zeit)

Empirische Werteverläufe: man legt zu bestimmten Zeitpunkten bestimmte Werte fest. System errechnet dann - unter Annahme der Linearität - die Werte dazwischen.
Modellstruktur bei Bank:

- aktueller Kreditstand ist Levelvariable, Zinssatz Konstant
- Kunde zahlt ab - reduziert den Kreditstand, aber Kredit belastet ihn wieder mit Zinsen

Siehe Folie: VenSIM, 6

4 Diskrete Simulation

4.1 allgemeine Prinzipien (insbes. Simulation mit Ereigniskalendersteuerung)

Allgmeine Prinzipien:

- keine mathematischen Beschreibungen, sondern algorithmusche
- Verhalten eines Objektes wird programmtechnisch nachgebildet
- Eigenschaften des Objektes spielen eine Rolle (Attribute)
- Zeitsteuerung verantwortliche für korrekte Nachbildung der Beziehungen zwischen den Objekten
- Paralellität der Vorgänge (mehrere Objekte werden gleichzeitig bearbeitet)

Ereigniskalendersteuerung

- fixe Zeitinkremente (es wird nach bestimmten Zeitintervall geschaut, was anliegt. Nützlich bei vielen Aktionen)
- variable Zeitinkremente (es wird ein Systemkalender geführt, wann die nächste Aktion eintritt)
  - persiodische unabhängige Ereignisse wird nächster Termin eingetragen
  - zufällige Ereignisse werden bei Arbeitung eines Voranges bestimmt - und eingetragen
  - feststehende Ereignisse zu Beginn im Kalender enthalten

Siehe Folie: Diskrete Modelle 6-14

4.2 effiziente Implementierungvon bedingten Ereignissen und deren Auswirkung auf die Performance

Beseitigung von Modellblockierungen

4.3 Vergleich Taylor / SLX, Bewertung Bausteinkonzept von Taylor

- Taylor graphisch, SLX Quellcode
- Taylor grundfunktionen schnell nutzbar, dafür nur schwer individuelle Wünsche

5 Optimierung

5.1 prinzipielle Vorgehensweise bei Optimierung

- Einschwingzeit beachten

5.2 Bewertung und Vergleich von Optimierungsverfahren

- Problem
  - großer Zeitaufwand durch mehrfache Simulation des gleichen Modells bei Anwendung der Suchalgorithmen (real bis zu einige Stunden)
  - durch zufällige Einflüsse mehrere Läufe zur statistischen Auswertung notwendig
- Lösungsansatz:
  - Aufspaltung in getrennte Berechnungsaufgaben und Experimentdurchführung
  - auf Mehrprozessorsystem (echtes Parallelcomputing)
  - auf einer Reihe von vernetzten Computern (so genanntes Hypercomputing), günstig bei einem Verhältnis von Kommunikationszeit « Rechenzeit
- Eignung der Verfahren:
  - Complex-Verfahren als Einzelalgorithmus schlecht, da kausale Abhängigkeit der Simplexpunkte
  - genetische Verfahren gut bei mehr als einem Individuum, da die Fitnessfunktion jedes neu hinzugefügten Individuums neu berechnet werden muss
  - bei getrennten Generationssträngen kann auch das Hypercomputing sinnvoll einsetzbar sein
  - Wichtig: Bei einer Notwendigkeit mehrerer Suchläufe zur Abklärung von Suboptima lässt sich prinzipiell jedes der Verfahren gut parallelisieren!

6 Ausblick

6.1 aktuelle Probleme der Simulationstechnik

- kaum Anwendung in KMU, nur 5% der Unternehmen setzen Simulation ein
- zu oft wird neues System entwickelt (gibt derzeit über 150 verschiedene Systeme)
- bei Optimierung meist alte Sprachen verwendet (GPSS von 1963)
- keine Standards im Bereich der Simulation
- kaum Komptiblität zwischen den Systemen
- Performance moderner Systeme meistens ungenügend
- relativ hohe Investitionskosten

6.2 Überblick über Lösungsoptionen

- Modularisierung statt Autonomie (es gibt Basispaket, alles weitere läuft über Module)
- Definition von Standards zur Beschreibung von Modellen
- Kombination von Simulation und Optimierung
- Neue Anwendungsbereiche webbasierte Systeme / ASP